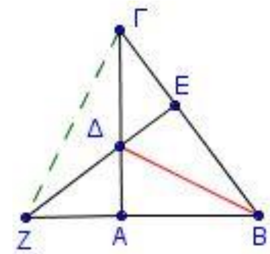
1705. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΕ = ΑΒ$ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΕΒ έχουν :

1) $Α\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Ε$ (διότι ΒΔ διχοτόμος)

2) ΒΔ=ΒΔ (κοινή πλευρά)

Συνεπώς ΑΒΔ=ΔΕΒ ,οπότε ΑΒ=ΒΕ

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΖ έχουν :

1) ΑΒ=ΒΕ (από α ερώτημα)

2) $\hat{Β} = \hat{Β}$ (κοινή γωνία)

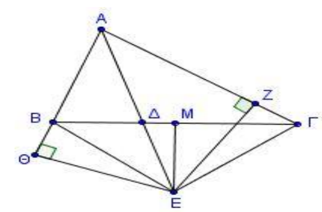
Συνεπώς ΑΒΓ=ΕΒΖ ,οπότε ΒΖ=ΒΓ ,δηλαδή το ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

1707. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $ΑΓΕ + ΑΒΕ = 180^\circ$. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α)Το σημείο Ε είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ,οπότε ισαπέχει από τα άκρα του.Άρα ΕΒ=ΕΓ, δηλαδή το ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘΒΕ και ΕΖΓ έχουν :

1)ΕΒ=ΕΓ (από ερώτημα α)

2)ΕΘ=ΕΖ (διότι το Ε είναι σημείο της διχοτόμου ΑΕ της γωνίας Α ,συνεπώς ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας)

Συνεπώς ΘΒΕ = ΕΖΓ,επομένως $Α\hat{Γ}Ε = Θ\hat{Β}Ε$

γ) $Α\hat{Γ}Ε + Α\hat{Β}Ε \overset{(\beta)}{=} Θ\hat{Β}Ε + Α\hat{Β}Ε = 180^\circ$

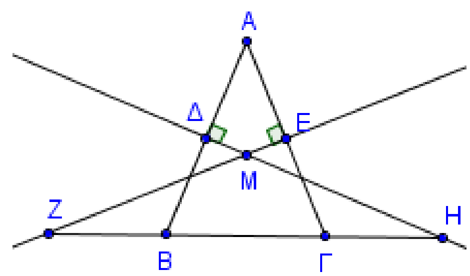
1578. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

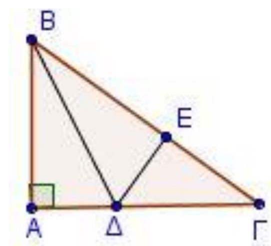


ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ έχουν :

1) ΔΒ=ΕΓ (ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ)
2) $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς ΑΒΓ)
Συνεπώς ΔΒΗ = ΕΖΓ ,οπότε $\hat{Z}=\hat{H}$
β) Από ερώτημα α) ισχύει $\hat{Z}=\hat{H}$,άρα το ΜΖΗ είναι ισοσκελές καθώς έχει δύο γωνίες ίσες.

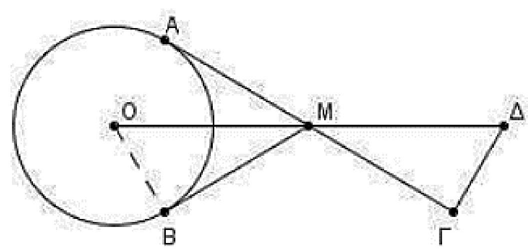
1646. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΔ = ΔΕ$ (Μονάδες 8)
β) $ΑΔ < ΔΓ$ (Μονάδες 9)
γ) $ΑΓ > ΑΒ$ (Μονάδες 8)



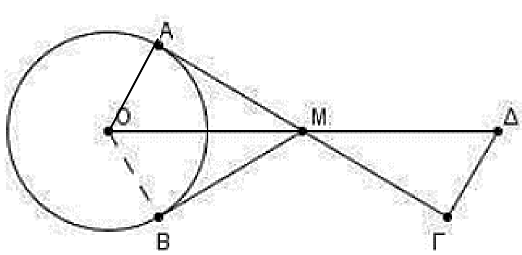
ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΔΕ έχουν :
1) ΒΔ=ΒΔ (κοινή πλευρά)
2) $A\hat{B}\Delta=\Delta\hat{B}E$ (διότι ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β)
Συνεπώς ΑΔΒ = ΒΔΕ ,οπότε ΑΔ=ΔΕ
β) Στο ορθογώνιο ΔΕΓ η ΔΓ είναι υποτείνουσα,άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.Οπότε ΔΓ>ΔΕ
γ) Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές.Συνεπώς στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\Gamma}<\hat{B}$,οπότε και ΑΒ<ΑΓ

1620. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.
α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

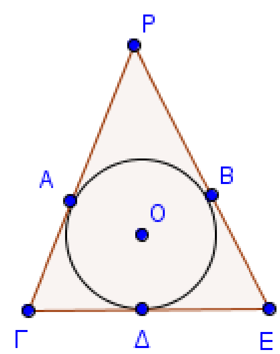


ΛΥΣΗ

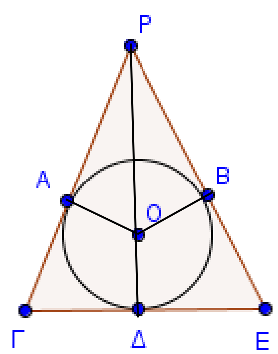


α) Τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ έχουν :
1) ΜΔ=ΟΜ (υπόθεση)
2) ΜΓ=ΜΒ (διότι ΜΑ=ΜΒ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου από το Μ και ΜΓ=ΜΑ)
3) $B\hat{M}O = \Gamma\hat{M}\Delta$ (διότι $A\hat{M}O = \Gamma\hat{M}\Delta$ ως κατακορυφήν και $A\hat{M}O = B\hat{M}O$ γιατί η διακεντρική ευθεία ΜΟ διχοτομεί τη γωνία ΑΜΒ των εφαπτομένων.)
Σύμφωνα με το κριτήριο Π.Γ.Π ισχύει ΟΜΒ και ΜΓΔ ,άρα ισχύουν και ΟΒ=ΓΔ, $M\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{B}M$ και $B\hat{O}M = M\hat{\Delta}\Gamma$.
β) Ισχύει ότι $O\hat{B}M = 90°$ καθώς η ακτίνα ΟΒ είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής Β και
$M\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{B}M$,οπότε $M\hat{\Gamma}\Delta = 90°$,που σημαίνει πως $\Gamma\Delta \perp A\Gamma$ (1).Επίσης η ακτίνα ΟΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΑΓ στο σημείο επαφής Α ,δηλαδη $OA \perp A\Gamma$ (2).Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ΟΑ//ΓΔ.

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O,ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α,Δ και Β.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $Ρ\Gamma = \Gamma\Delta + AP$ (Μονάδες 6)
ii. $Ρ\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$ (Μονάδες 8)
β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι
i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α) i. ΓΑ=ΓΔ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου απο το σημείο Γ.Συνεπώς: ΡΓ=ΡΑ+ΑΓ=ΡΑ+ΓΔ
ii. ΕΒ=ΕΔ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου απο το σημείο Ε και ΡΑ=ΡΒ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου απο το σημείο Ρ.Συνεπώς:
$P\Gamma = \Gamma\Delta + PA \Leftrightarrow PA = P\Gamma - \Gamma\Delta$ (1)
$PB = PE - BE = PE - \Delta E$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $P\Gamma - P\Delta = PA = PB = PE - \Delta E \Rightarrow P\Gamma - P\Delta = PE - \Delta E$.
β) i. Αν ΑΓ=ΒΕ τότε ΑΓ=ΓΔ=ΔΕ=ΒΕ.

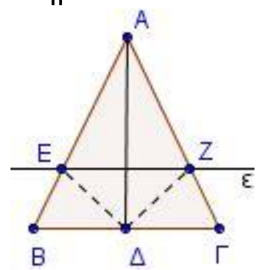
Ισχύει ΡΓ=ΓΔ+ΡΑ ,ΡΕ=ΡΒ+ΔΕ , οπότε ΡΓ=ΡΕ ,δηλαδή το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. Ισχύουν ΟΑ=ΟΒ=ρ και $\mathrm{OA} \perp \mathrm{P\Gamma}$, $\mathrm{OB} \perp \mathrm{PB}$,συνεπώς το Ο ισαπέχει από τις πλευρές ΡΓ,ΡΕ της γωνίας Ρ ,οπότε τα σημεία Ρ,Ο,Δ είναι συνευθειακά.

1544. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma})$ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $\mathrm{A\hat{E}Z} = \hat{\mathrm{B}}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ,ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ και $\mathrm{A\hat{Z}E} = \hat{\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ,ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ.
Αλλά ισχύει $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς ΑΒΓ,οπότε $\mathrm{A\hat{Z}E} = \mathrm{A\hat{E}Z}$,δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ έχουν:

1) ΑΔ=ΑΔ (κοινή πλευρά)

2) $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ (διότι ΑΔ διχοτόμος της Α)

3) ΑΕ=ΑΖ (διότι ΑΕΖ ισοσκελές με βάση ΕΖ)

Συνεπώς από το κριτήριο Π.Γ.Π προκύπτει ΑΕΔ = ΑΖΔ

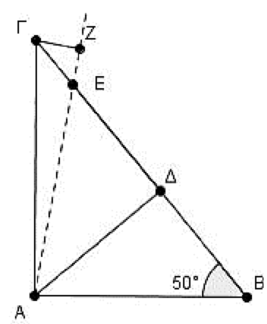
1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(\mathrm{A} = 90^\circ\right)$ με $\mathrm{B} = 50^\circ$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii. $\Gamma\mathrm{AE} = 10^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.(Μονάδες 9)



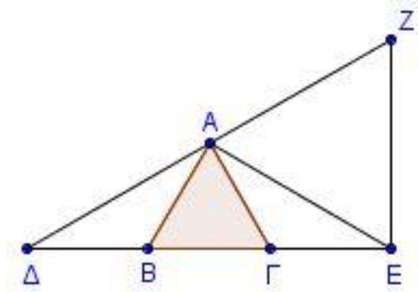
ΛΥΣΗ

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΕ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος , άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\mathrm{A\hat{E}B} = \hat{\mathrm{B}} = 50^\circ$

ii. Στο τρίγωνο ΑΕΒ: $E\hat{A}B + A\hat{E}B + \hat{B} = 180° \Leftrightarrow E\hat{A}B + 2\cdot 50° = 180° \Leftrightarrow E\hat{A}B = 80°$.Επίσης $E\hat{A}B + \Gamma\hat{A}E = 90° \Leftrightarrow 80° + \Gamma\hat{A}E = 90° \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}E = 10°$

β) $\Gamma\hat{E}Z = A\hat{E}B = 50°$ ως κατακορυφήν.Αφού $\Gamma\hat{Z}E = 90°$ στο τρίγωνο ΓΖΕ ισχύει ότι $\Gamma\hat{E}Z + E\hat{\Gamma}Z = 90° \Leftrightarrow 50° + E\hat{\Gamma}Z = 90° \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}Z = 40°$

1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. (Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότιΑΒ//ΓΖ (Μονάδες 5)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ,οπότε $B\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 60^0$.Ισχύει $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 180^0 - 60^0 = 120^0$.Επειδή ΑΒ=ΑΔ=ΑΓ=ΓΕ ,τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή με ΑΔΒ=ΔΑΒ=ΓΑΕ=ΓΕΑ=ω^0 .Στο τρίγωνο ΑΒΔ από το άθροισμα των γωνιών του προκύπτει ότι $A\hat{B}\Delta + 2\omega = 180^0 \Leftrightarrow 120° + 2\omega = 180^0 \Leftrightarrow \omega = 30°$

β) Αφού ΑΓ=ΓΕ ,το Γ ισαπέχει από τα Α και Ε και συνεπώς ανήκει σην μεσοκάθετο του ΑΕ.Ισχύει

$\Gamma\hat{A}Z = \omega + \hat{A} = 30° + 60° = 90° = \Delta\hat{A}\Gamma$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ έχουν :

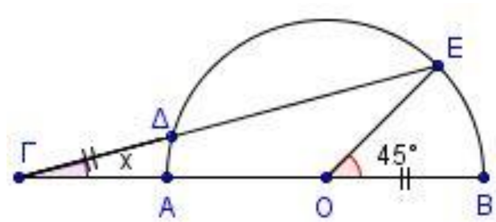
1) ΓΖ=ΓΖ (κοινή πλευρά)

2) ΑΓ=ΓΕ (από υπόθεση)

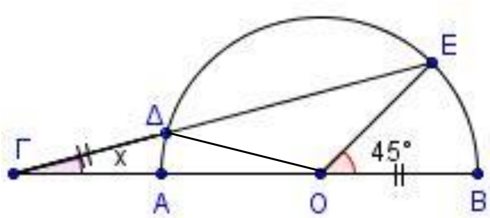
Συνεπώς ΑΓΖ =ΓΕΖ ,οπότε και ΖΑ=ΖΕ ,δηλαδή το Ζ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΑΕ. Αφού τα Γ και Ζ ανήκουν στην μεσοκάθετο του ΑΕ ,η ΓΖ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΓΕ το ΓΖ είναι ύψος και διάμεσος ,άρα και διχοτόμος ,δηλαδή $A\hat{\Gamma}Z = Z\hat{\Gamma}E = \dfrac{120^0}{2} = 60°$.Τελικα $A\hat{B}\Gamma = Z\hat{\Gamma}E = 60°$ και είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ,ΓΖ που τέμνονται από την ΒΓ.Συνεπώς ΑΒ//ΓΖ.

1576. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και $BOE = 45^{\circ}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma O = x$. (Μονάδες 25)



ΛΥΣΗ



Αν ρ η ακτίνα του ημικυκλίου τότε ΟΑ=ΟΒ=ΟΕ=ΓΔ=ΟΔ=ρ

Αφού ΓΔ=ΟΔ=ρ ,το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΟΓ ,οπότε $\Delta\hat{O}A = \hat{\Gamma} = x$.Η γωνία ΟΔΕ είναι εξωτερική του τριγώνου ΟΓΔ ,άρα $O\hat{\Delta}E = \Delta\hat{O}A + \hat{\Gamma} = 2x$

Αφού ΟΕ=ΟΔ=ρ ,το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ ,οπότε $O\hat{\Delta}E = \hat{E} = 2x$.

Η γωνία ΒΟΕ είναι εξωτερική του τριγώνου ΓΟΕ ,άρα

$B\hat{O}E = \hat{E} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 45° = 2x + x \Leftrightarrow 3x = 45° \Leftrightarrow x = 15°$