ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μεγ.ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

A_1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

9 μονάδες

A_2.. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

3 Μονάδες

A_3. Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$ όπου f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ στο οποίο παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha<\gamma<\beta$.

3 Μονάδες

A_2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

i. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

ii. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

iii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και f(β) μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

iv. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

v. Αν η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.
Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και $f'(x_0) = 0$
τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

10 μονάδες

,

ΘΕΜΑΒ

Δίνεται η συνάρτηση *f*, $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}+2017x+2016, x\neq 0 \\ \\ a, x=0 \end{cases}$.

i. Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0]$.

ii. Για α=2016 εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

iii. Εξετάστε αν υπάρχει τιμή του α για την οποία η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

iv. Να υπολογίσετε τα λ,β για τα οποία η ευθεία y=λx+β είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f όταν $x\to+\infty$,όταν $x\to-\infty$

v. Για α=2016 να μελετήσετε την γραφική παράσταση της f ως προς τα κοίλα. Έχει σημεία καμπής;

25 μονάδες

Θέμα Γ

Γ₁. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ δυο φορές παραγωγίσιμη με f(0) =1 (1) , f΄(0) = 2 (2) και $8f^2(x) - f'(x)f''(x) = 0$ (3)

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 8f^3(x) - (f'(x))^3$ είναι σταθερή
2. Να βρεθεί ο τύπος της f(x)
3. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f h η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων .
4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα yy' και την παραπάνω εφαπτομένη

12 μονάδες

Γ₂ . Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f'(x) = 2xe^x$ για κάθε $x \in R$
- $f(0) = 0$
- $\int_0^1 g(x)dx \cdot e^{\int_0^1 g(x)dx-1} - 2e^{\int_0^1 g(x)dx-1} = -1$
- $g(x) \neq 0$

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2xe^x - 2e^x + 2$

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση το 0

iii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της *f*, τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x = 0 και x = 1 είναι ίσο με Ε = 6 – 2e .

iv. Να δείξετε ότι g(x) > 0

13 Μονάδες

Διάμεσος
Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R με $f(0) = -\ln 2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} = 1 + f'(x) \text{ για κάθε } x \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln(e^x + 1)$, x∈R

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση *f* ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης *f* στο σημείο της (0, f (0))

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx < -\dfrac{1+\ln 16}{4}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0)$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

ε) Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = (\ln(e+1) - \ln 2)x_o - \ln(e+1)$

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = \ln^2\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$

Μονάδες 12

Δ2.

Θεωρούμε συναρτήσεις *f,g* για τις οποίες ισχύουν

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$
- $e^{g(x)} + g(x) - x - \ln x = e^{x + \ln x}, x > 0$

i. Να γίνει μελέτη της *f* ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι $g(x) = x + \ln x, x > 0$ και να γίνει μελέτη της *g* ως προς τη μονοτονία

ii. Εάν F αρχική της *f* με F(0)=0 ,να δείξετε ότι $F(\varepsilon\varphi x) = x, x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$

iii. Να λυθεί η ανίσωση $F(e^x) = F(\ln(x+1)+1), x > 0$

iv. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (0,1)

Μονάδες 13

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση.</u>

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Παναγιώτης Ασημακόπουλος

Κατερίνα Τζεμπελίκου

Ιωάννης Παπασίκας