ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Β΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Μεγ.ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

ΘΕΜΑ Α

A₁. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δυο διανύσματα του επιπέδου με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ εφόσον $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$.

9 μονάδες

A₂. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

i. Εάν μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο ,τότε η ευθεία είναι εφαπτόμενη της παραβολής .

ii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

iii. Η παραβολή $C: y^2=2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$

iv. Η ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο $\vec{\delta}=(-B,A)$

v. Για κάθε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία : $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

vi. Η εξίσωση $c: x^2+y^2+2\alpha x+3\beta y-4\gamma=0$ με $4\alpha^2+9\beta^2+16\gamma=0$ είναι κύκλος με κέντρο $K=\left(-a,-\frac{3\beta}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{4\alpha^2+9\beta^2-16\gamma}}{2}$

vii. Στη παραβολή $y^2=2px$ ο αριθμός p λέγεται παράμετρος της παραβολής και εκφράζει την απόσταση της εστίας με τη διευθετούσα της.

viii. Εάν μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο ,τότε η ευθεία είναι εφαπτομένη στη παραβολή .

16 μονάδες

ΘΕΜΑΒ

B₁ . Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

i. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ii. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

iii. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

iv. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)$

v. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\delta}=x\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$. Να βρεθεί το x ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ να είναι κάθετα.

15 μονάδες

B₂ . Δίνεται η εξίσωση: $x^2+2xy+y^2-6x-6y+8=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Αν $\varepsilon_1: x+y-2=0$ και $\varepsilon_2: x+y-4=0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2.

10 μονάδες

<u>Θέμα Γ</u>

Γ₁. Δίνονται τα σημεία $A(-2,4)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma(-1,3)$. Να βρείτε :

i. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και το μέτρο του

ii. Το διάνυσμα $\vec{\beta}=\overrightarrow{A\Gamma}$, τον συντελεστή διεύθυνσης του $\lambda_{\vec{\beta}}$ και τη γωνία που σχηματίζει αυτό με τον άξονα $x'x$

iii. Την εξίσωση της παραβολής (C) που έχει κορυφή το $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και σταθερά $p=-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

iv. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε της (C) καθώς και την εξίσωση (δ) της διευθετούσας της

12 μονάδες

Γ₂ . Έστω ο κύκλος $c_1: x^2+y^2-2x-4\lambda x+4\lambda=0$ και η παραβολή $c_2: y^2=2px$.

i. Αν το κέντρο του κύκλου (c_1)είναι η εστία της παραβολής (c_2)να βρεθεί η παράμετρος της παραβολής p.

ii. Για την τιμή της p του ερωτήματος (i) να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής (c_2) που διέρχονται από το σημείο Α(0,2)

iii. Ποια από τις εφαπτόμενες της παραβολής (c_2) εφάπτεται και στον κύκλο (c_1)

13 Μονάδες

,

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,y)$, $\vec{\beta}=(1,2)$, $\vec{\gamma}=(2\lambda,y)$ και $\vec{\delta}=(x,4\lambda)$, $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}^*$

i. .Αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}-10\lambda\ (1)$. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του ρ

ii. Αν ο παραπάνω κύκλος έχει εξίσωση $C: x^2+y^2-2(1+\lambda)x-4(1+\lambda)y+10\lambda+5=0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων

β. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α

Μονάδες 12

Δ2.

i. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το σημείο $K(3,4)$ είναι ίση με 3.

ii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του C από την αρχή των αξόνων καθώς και τα σημεία του C που έχουν αυτές τις αποστάσεις.

iii. Να βρείτε τις εφαπτομένες του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

iv. Να δείξετε ότι το σημείο $H(4,2)$ είναι εσωτερικό του C και να βρείτε τη χορδή του που έχει μέσο το Η.

Μονάδες 13

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση.</u>
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ασημακόπουλος Παναγιώτης

Παπασίκας Γιάννης